NÄHERUNGSWEISE ERMITTLUNG DES STOFFÜBERGANGES IN DER UMGEBUNG IN NICHT-NEWTONSCHEN POTENZFLÜSSIGKEITEN ROTIERENDER SCHEIBEN

P. MITSCHKA

Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik, Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, 165 02 Prag 6 - Suchdol

Eingegangen am 14. September 1976

Vorgelegt werden zwei Methoden zur näherungsweisen Lösung der Stofftransportproblematik in der Umgebung von Scheiben, die unter laminaren Bedingungen in ansonsten ruhenden nicht-Newtonschen Potenzflüssigkeiten rotieren. Die Genauigkeit der Ergebnisse verglichen mit der exakten Lösung und Experimenten ist für praktische Zwecke völlig befriedigend.

Mit dem Stofftransport an in nicht-Newtonschen Potenzflüssigkeiten rotierende Scheiben befaßten sich unlängst mehrere Autoren. Während Hansford und Litt[1] in ihrer Lösung der diese Situation erfassenden Gleichung der laminaren Grenzschichtdiffusion

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \qquad (1)$$

den radialen Konvektivstrom (gegeben durch den ersten Term in Gl. (*1*)) vernachlässigten, gelang es später Shul'man und Mitarbeitern[2], Greif und Paterson[3] und Daguenet und Mitarbeitern[4] unabhängig voneinander eine exakte Lösung des interessierenden Problems zu finden.

Ziel dieser Mitteilung ist es alternative Möglichkeiten einer näherungsweisen Lösung dieses Problems aufzuzeigen und die Resultate derartiger Verfahren mit den exakten[2-4] (und experimentell beglaubigten) Werten zu vergleichen.

Dazu gehen wir von der über die Dicke der Konzentrationsgrenzschicht δ_c integrierten Form der Gl. (*1*) aus (s. z. B. Olander[5]):

$$r \frac{d}{dr} \int_0^{\delta_c} \frac{v_r}{r} (c - c_\infty) \, dz + 2 \int_0^{\delta_c} \frac{v_r}{r} (c - c_\infty) \, dz = - D \left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=0} . \qquad (2)$$

Für die bei hochkonsisten nicht-Newtonschen Flüssigkeiten zu erwartenden hohen Schmidt-Zahlen kann der Verlauf der Radialkomponente des Geschwindigkeitsvektors im Bereich der Konzentrationsgrenzschicht (in Wandnähe) durch die lineare Beziehung[6]

$$v_r = a_e r\omega\zeta = a_e(\omega^3/N)^{1/(n+1)} r^{2/(n+1)} z \tag{3*}$$

approximiert werden. Die Werte des Gradienten der dimensionslosen Radialgeschwindigkeit an der Scheibenwand $a_e(n) = G''(0)$ sind in unserer vorhergegangenen Arbeit[7] enthalten.

Für die Verteilung der Konzentration der aktiven Komponente in der (Diffusions-)Grenzschicht setzen wir – wie in ähnlichen Studien[5,8] üblich – das Polynom

$$\frac{c - c_\infty}{c_w - c_\infty} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{z}{\delta_c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\delta_c}\right)^3 \tag{4}$$

an, das den Randbedingungen des zu lösenden Problems

$$\begin{aligned} z &= 0 \qquad c = c_w \\ z &= \delta_c \qquad c = c_\infty \end{aligned} \tag{5}$$

genügt. Die obenstehende Formulierung schließt beide praktisch interessante Stofftransportprobleme an rotierenden Scheiben in sich ein:

1) Die Auflösung eines mäßig lösbaren Substrats von der Scheibenoberfläche in die sie umgebende Flüssigkeit (s. z. B.[1,5]), wobei $c_w = c_s$ und $c_\infty \approx 0$ gilt.

2) Die Anwendung der Scheibe als einer geometrisch und hydrodynamisch gut definierten Oberfläche, an der es zu chemischen Umsetzungen der aktiven, in der Flüssigkeit gelösten Substanz kommt (z. B. als rotierende Scheibenelektrode), wobei in der Regel $c_w = 0$ (sog. Grenzstromregime) und $c_\infty = c_s$ gilt.

Durch Einsetzen von (*4*) in (*2*) resultiert nach Durchführung der angedeuteten Integrationen und Differentiationen nach einigen Umgestaltungen (s. z. B.[9]) für die dimensionlose Dicke der Konzentrationsgrenzschicht $\zeta_c = \delta_c(\omega^{2-n} r^{1-n} \, . \, N^{-1})^{1/(1+n)}$ die lineare Differentialgleichung

$$\zeta_c^3 r^{2(n-1)/(n+1)} + \frac{2}{3}\,\frac{n+1}{3n+1}\, r^{(3n-1)/(n+1)} \frac{d(\zeta_c^3)}{dr} = \frac{15D}{a_e}\,\frac{n+1}{3n+1}\,\frac{\omega^{3(1-n)/(n+1)}}{N^{2/(1+n)}} \tag{6*}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\zeta_c^3 = \frac{3(3n+1)}{5n+7} B r^{2(1-n)/(n+1)} + C r^{-3(3n+1)/2(n+1)}, \tag{7*}$$

* Die gesternten Gleichungen reduzieren sich für $n = 1$ auf die allgemein bekannten Resultate für Newtonsche Flüssigkeiten (s.[5,9]).

wenn mit B die auf der rechten Seite der Gl. (6) stehende Konstante bezeichnet wurde. Die Integrationskonstante C in (7) kann durch die Erfüllung der Bedingung $\zeta_c = 0$ an der Trennlinie $r = r_1$ zwischen einer aktiven und einer inaktiven Zone der Scheibe bestimmt werden.

Primäres Resultat der Rechnung ist somit eine Beziehung für die annähernde Dicke der Konzentrationsschicht ζ_c^3

$$\zeta_c^3 = \frac{3(3n+1)}{5n+7} Br^{2(1-n)/(n+1)} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{(7+5n)/2(n+1)}\right] \qquad (8a)^*$$

oder auch

$$\delta_c = B' r^{(n-1)/3(n+1)} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^{(7+5n)/2(n+1)}\right]^{1/3} \qquad (8b)^*$$

mit

$$B' = N^{1/(n+1)} \omega^{(n-2)/(n+1)} \left[\frac{3(3n+1)}{5n+7} \frac{15D}{a_e} \frac{\omega^{3(1-n)/(n+1)}}{N^{2/(n+1)}}\right]^{1/3}. \qquad (8c)^*$$

Für den lokalen Stoffstrom $j(r)$ von der Scheibe gilt für das angesetzte Konzentrationsprofil

$$j(r) = -D \left.\frac{\partial c}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{3}{2} \frac{D(c_w - c_\infty)}{\delta_c(r)}; \qquad (9)$$

für seinen Mittelwert von oder zu einem Kreisring zwischen r_1 und $r_2 = r_1 + \Delta r$ dann

$$\bar{J} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r\, j(r)\, dr}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{3D(c_w - c_\infty)}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{\delta_c(r)} dr \qquad (10a)^*$$

und nach Einsetzen für $\delta_c(r)$ aus (8b) und Integration auch

$$\bar{J} = \frac{3D(c_w - c_\infty)}{(r_2^2 - r_1^2) B'} \frac{3(n+1)}{7+5n} \left[r_2^{(7+5n)/2(n+1)} - r_1^{(7+5n)/2(n+1)}\right]^{2/3}. \qquad (10b)^*$$

Grenzfall des rotierenden Kreisrings ist eine gleichmässig aktive ($r_1 = 0$) Scheibe mit dem Halbmesser $r_2 = \mathrm{R}$. Führen wir nun die Sherwood-Zahl und die Schmidt- und Reynolds-Zahl für Rotationsströmungen von Potenzflüssigkeiten wie

$$\mathrm{Sh} = \bar{J}R/D(c_w - c_\infty), \quad \mathrm{Sc}_{NN} = N\omega^{n-1}/D, \quad \mathrm{Re}_{NN} = R^2\omega^{2-n}/N \qquad (11)^*$$

ein, resultiert für den Stoffübergang in der Umgebung rotierender Scheiben die Korrelation

$$\mathrm{Sh} = \Phi_a(n)\,\mathrm{Sc}_{\mathrm{NN}}^{1/3}\,\mathrm{Re}_{\mathrm{NN}}^{(2+n)/3(n+1)}\,, \qquad (12)^*$$

mit der – vom Fließindex n der Potenzflüssigkeit – abhängigen Proportionalitätskonstante

$$\Phi_a(n) = \frac{9(n+1)}{7+5n}\left[\frac{5n+7}{3(n+1)}\frac{a_e}{15}\right]^{1/3} = \left[\frac{81a_e}{5}\left(\frac{n+1}{7+5n}\right)^2\right]^{1/3} \qquad (12a)^*$$

Die Relation (12) stimmt ihrem Aufbau nach mit den exakten Lösungen[2-4] überein, wo allerdings

$$\Phi_e(n) = 0{,}89\left[12a_e\left(\frac{n+1}{7+5n}\right)^2\right]^{1/3} \qquad (12b)$$

gilt. Der Vergleich der Zahlenwerte von Φ_a und Φ_e zeigt, daß die relative perzentuelle Abweichung zwischen der näherungsweisen und der exakten Rechnung $\Delta\Phi = (\Phi_a - \Phi_e)/\Phi_e \,.\, 100$ für alle Potenzflüssigkeiten gleich ist und $-1{,}4\%$ beträgt. Dies stellt für praktische Zwecke eine völlig befriedigende Genauigkeit der Näherungslösung dar.

Ein Vorteil des vorgelegten Verfahrens, das auf der Anwendung der Integralform der Stofftransportgleichung (2) basiert, kann u. a. auch darin bestehen, daß diese Methode prinzipiell auch bei solchen Problemen anwendbar ist, wenn die Werte für a_e in der Gl. (3) nicht zur Verfügung stehen. Dies trifft z. B. in solchen Fällen zu, wenn die exakte Lösung der zugehörigen rein hydrodynamischen Aufgabe noch nicht bekannt ist oder nur außerordentlich schwierig zu gewinnen wäre. Als Beispiel hierfür könnte das Problem der Rotation einer Kugel in nicht-Newtonschen Potenzflüssigkeiten und die hiermit verbundenen Transportprobleme angeführt werden, da die Kugelfläche nicht zu den Oberflächenformen zählt, für die Ähnlichkeitslösungen der fundamentalen Grenzschichtgleichungen möglich sind[10].

In solchen Fällen können wir uns bei der Lösung analoger Transportprobleme einer weiteren Approximation bedienen, die darin besteht, daß statt der a_e-Werte in der Gl. (3), wie auch in allen nachfolgenden Relationen, ein Näherungswert a_a benutzt wird, der aus der approximativen Lösung der entsprechenden rein hydrodynamischen Aufgabe, z.B. durch Anwendung der Integralbeziehungen für den Impuls, bestimmt wurde. Es ist offensichtlich, daß ein solcher Eingriff in den Gang der Lösung in die Resultate solcher Rechnungen noch weitere Ungenauigkeiten einführen kann, deren Größe im vornherein nicht abgeschätzt werden kann und die lediglich durch Vergleich mit einem exakt lösbaren Problem ermittelt werden können.

Eine Abschätzung der zu erwartenden Abweichungen, die sich aus den vorerwähnten Vereinfachungen ergeben, wollen wir wiederum für den Fall einer rotierenden Scheibe durchführen, und dies durch Nutzung der Resultate der exakten[7] und der näherungsweisen[11] Lösung der entsprechenden Gleichung der laminaren nicht-Newtonschen Grenzschicht mit Hilfe der Integralbedingungen für den Impuls. Es kann gezeigt werden, daß zwischen dem approximativen Wert des Gradienten der dimensionslosen Radialgeschwindigkeit an der Scheibenoberfläche a_a und der Lösung des interessierenden rein hydrodynamischen Problems bei Nutzung der Integralbedingungen für den Impuls, d. h. zwischen der approximativen (dimensionslose) Dicke der hydrodynamischen Grenzschicht $\zeta_{0,a}$ und dem sog. Formfaktor α die einfache Relations $a_a = \alpha/\zeta_{0,a}$ besteht. Die Größen $\zeta_{0,a}$ und α sind bei gegebenem Fließindex n Funktionen (zumindest) zweier weiterer Parameter, die die Form der für die entsprechenden Geschwindigkeitsprofile benutzten Ansätze festlegen, die bei der benutzten Integralmethode ähnlich wie das Konzentrationsprofil der aktiven Substanz in der vorstehenden Ableitung (Gl. (*4*)) gewählt werden müssen[11].

Einige Ergebnisse der näherungsweisen Lösung der reinen Hydrodynamik der Scheibenrotation bei Anwendung der Integralbedingungen für den Impuls (d. h. die Werte von $\zeta_{0,a}$ und α) und die aus ihnen berechenbaren, für die näherungsweise Auswertung von Transportproblemen benötigten a_a-Werte zeigt die Tabelle I. Der Vergleich dieser Resultate mit der exakten Lösung für den Stoffübergang ist instruktiv durch die relative perzentuelle Abweichung zwischen den approximativen und den exakten Werten der Stoffströme

$$\Delta\bar{J}(n) = \frac{\bar{J}_a - \bar{J}_e}{\bar{J}_e} \,.\, 100 = \left[\left(\frac{\alpha/\zeta_{0,a}}{a_e}\right)^{1/3} - 1\right] .\, 100 \qquad (13)$$

TABELLE I

Zur Anwendbarkeit der Näherungslösung durch Integralbeziehungen für den Impuls für die Ermittlung des Stofftransportes an rotierenden Scheiben

Angesetzte Geschwindigkeitsprofile (s.[11]):

$$v_r = \alpha r\,\omega(Z - 2Z^2 + Z^3)\,; \quad v_\varphi = r\,\omega(1 - Z^2)\,, \quad Z = z/\delta\,.$$

Fließindex	a_e	Ergebnisse der Näherungslösung (s.[11])			$\Delta\bar{J}$, %
n	(s.[7])	α	$\zeta_{0,a}$	$a_a = \alpha/\zeta_{0,a}$	
0,2	0,528	1,604	4,005	0,400	−8,9
0,5	0,500	1,521	3,586	0·424	−5,4
1,0	0,510	1,449	3,217	0·450	−4,1
1,5	0·529	1,411	3,019	0,467	−4,1

durchführbar. Aus der Tabelle I ist klar zu sehen, daß der Ersatz der a_e-Werte durch ihre mittels der Methode der Integralbedingungen für den Impuls errechneten Approximationen die Genauigkeit der Resultate bei der Berechnung des Stoff- (oder Wärme-) Transports zur oder von der Scheibe etwas herabsetzt. Die relativen Abweichungen um max. 10 rel.-%, auch bei ausgeprägt pseudoplastischen Flüssigkeiten ($n = 0{,}2$), sind im Hinblick auf die benutzten weitgehenden Vereinfachungen akzeptabel. Mit ordnungsmäßig gleichen Genauigkeiten könnte höchstwahrscheinlich auch bei der analogen Lösung ähnlicher Transportproblems bei achsensymmetrischen Drehströmungen nicht-Newtonscher Potenzflüssigkeiten gerechnet werden.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

D Diffusionskoeffizient der aktiven Komponente
K Konsistenzkoeffizient, Stoffparameter des Potenzansatzes
n Fließindex, Stoffparameter des Potenzansatzes
$N = K/\varrho$
r Radialkoordinate ($r = 0$ ist die Rotationsachse)
R Halbmesser einer endlichen gleichmäßig aktiven Scheibe
v_r, v_φ, v_z — Radial-, Azimutal- und Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors
z Normalkoordinate ($z = 0$ ist die Scheibenoberfläche)
α Formfaktor in der Näherungslösung
δ Dicke der dynamischen (viskosen) Grenzschicht
δ_c Dicke der Konzentrationsgrenzschicht
ϱ Dichte der Flüssigkeit
ω Winkelgeschwindigkeit der Scheibenrotation

Indexe

a aus der approximativen Lösung
e aus der exakten Lösung
s Gleichgewichtswert
w an der Scheibenwand
∞ in genügender Entfernung von der Scheibe (im Lösungsinneren)
NN für Potenzflüssigkeiten

LITERATUR

1. Hansford G. S., Litt M.: Chem. Eng. Sci. *23*, 849 (1968).
2. Shulman Z. P., Pokryvailo N. A., Kordonskii V. I., Nesterov A. K.: Int. J. Heat Mass Transfer *16*, 1339 (1973).
3. Greif R., Paterson J. S.: Phys. Fluids *16*, 1816 (1973).
4. Daguenet M., Bodiot D., Grandjean A.: Electroanal. Chem. Interfac. Electrochem. *56*, 91 (1974).
5. Olander D.: Chem. Eng. Sci. *19*, 275 (1964).
6. Lighthill M. J.: Proc. Roy. Soc. *202 A*, 359 (1950).
7. Mitschka P., Ulbrecht J.: diese Zeitschrift *30*, 2511 (1965).
8. Mihail R.: Chem. Eng. Sci. *26*, 2117 (1971).
9. Pleskov Yu. V., Filinovskii V. Yu.: *Vrashchayushchiisya Diskovyi Elektrod.* Nauka, Moskau 1972.
10. Mitschka P.: diese Zeitschrift *29*, 2892 (1964).
11. Mitschka P.: diese Zeitschrift *41*, 1627 (1976).

Übersetzt vom Autor.